Глава 7 **КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Алгоритмы

А-1 Решение квадратных уравнений с помощью теоремы Виета
А-2 Разложение многочлена на множители
А-3 Определение числа вещественных корней квадратного трехчлена и нахождение их по формуле
А-4 Решение симметричных систем
А-5 Решение рациональных уравнений

А-1 *Решение квадратных уравнений с помощью теоремы* Виета

1. В таблице перечислены все квадратные трехчлены $x^2 + px + q$ с коэффициентами, не превосходящими по модулю 12, и такие, что квадратный трехчлен имеет целые корни. Найдите эти корни.

1	x^2	17	$x^2 \pm 4x + 3$	33	$x^2 \pm 7x + 12$
2	$x^2 - 1$	18	$x^2 \pm 4x + 4$	34	$x^2 \pm 8x$
3	$x^2 - 4$	19	$x^2 \pm 4x - 5$	35	$x^2 \pm 8x + 7$
4	$x^2 -9$	20	$x^2 \pm 4x - 12$	36	$x^2 \pm 8x - 9$
5	$x^2 \pm x$	21	$x^2 \pm 5x$	37	$x^2 \pm 8x + 12$
6	$x^2 \pm x - 2$	22	$x^2 \pm 5x + 4$	38	$x^2 \pm 9x$
7	$x^2 \pm x - 6$	23	$x^2 \pm 5x \pm 6$	39	$x^2 \pm 9x + 8$
8	$x^2 \pm x - 12$	24	$x^2 \pm 6x$	40	$x^2 \pm 9x - 10$
9	$x^2 \pm 2x$	25	$x^2 \pm 6x + 5$	41	$x^2 \pm 10x$
10	$x^2 \pm 2x + 1$	26	$x^2 \pm 6x - 7$	42	$x^2 \pm 10x + 9$
11	$x^2 \pm 2x - 3$	27	$x^2 \pm 6x + 8$	43	$x^2 \pm 10x - 11$
12	$x^2 \pm 2x - 8$	28	$x^2 \pm 6x + 9$	44	$x^2 \pm 11x$
13	$x^2 \pm 3x$	29	$x^2 \pm 7x$	45	$x^2 \pm 11x + 10$
14	$x^2 \pm 3x - 4$	30	$x^2 \pm 7x + 6$	46	$x^2 \pm 11x - 12$
15	$x^2 \pm 3x - 10$	31	$x^2 \pm 7x - 8$	47	$x^2 \pm 12x$
16	$x^2 \pm 4x$	32	$x^2 \pm 7x + 10$	48	$x^2 \pm 12x + 11$

2. Найдите корни квадратных уравнений с помощью теоремы Виета.

А. Перебор делителей свободного члена

1) $x^2 - 5x - 14 = 0$
2) $x^2 + 11x + 18 = 0$
3) $x^2 - x - 20 = 0$
4) $x^2 + 10x + 21 = 0$
5) $x^2 - 11x + 24 = 0$
6) $x^2 - 6x - 27 = 0$
7) $x^2 + x - 30 = 0$
8) $x^2 + 13x + 36 = 0$
9) $x^2 - 16x - 57 = 0$
10) $x^2 - 20x + 75 = 0$
11) $x^2 - 7x - 120 = 0$
12) $x^2 + 117x - 1000 = 0$

Б. Другие варианты подбора корней

1) $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$
2) $x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$
3) $x^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0$
4) $x^2 - \frac{9}{2}x + 2 = 0$
5) $x^2 + \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1 = 0$
6) $x^2 - x + a - a^2 = 0$
7) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})\,x + \sqrt{6} = 0$
8) $x^2 - (1 + \sqrt{5})\,x + \sqrt{5} = 0$

3. Найдите все целые значения p, при которых корни уравнения $x^2 + px - 12 = 0$ являются целыми числами.

4. Найдите все целые положительные значения q, при которых корни уравнения $x^2 + 5x + q = 0$ являются целыми числами.

5. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

1) 4 и –1
2) 2 и 3
3) –1 и –6
4) $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$
5) $2 - \sqrt{3}$ и $2 + \sqrt{3}$
6) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

6. По данному уравнению с неизвестным коэффициентом и значению одного из корней, найти второй корень уравнения и неизвестный коэффициент.

	Уравнение	x_1	Найти	
1	$x^2 + px + 12 = 0$	1	$x_2 = ?$	$p = ?$
2	$x^2 + px - 12 = 0$	1	$x_2 = ?$	$p = ?$
3	$x^2 - px + 12 = 0$	–1	$x_2 = ?$	$p = ?$
4	$x^2 - 15x + q = 0$	–1	$x_2 = ?$	$q = ?$
5	$x^2 - 26x + q = 0$	6	$x_2 = ?$	$q = ?$
6	$x^2 + 35x + q = 0$	3	$x_2 = ?$	$q = ?$

7. Симметричные выражения

А. Пусть x_1 и x_2 – корни данного квадратного трехчлена. Вычислите значения следующих выражений P.

P трехчлен	$x_1^2+x_2^2$	$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$	$x_1^3+x_2^3$	$(x_1-x_2)^2$	$\frac{x_1}{x_2+1}+\frac{x_2}{x_1+1}$
x^2+3x-1					
x^2+5x+2					
$x^2+3x+10$					
$2x^2+2x-3$					

Б. Для каждого из трехчленов, данных в пункте А, постройте квадратные трехчлены, корни которых выражались бы через x_1 и x_2 следующим образом.

1) $2x_1, 2x_2$

2) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$

3) x_1^2, x_2^2

4) x_1^4, x_2^4

5) $\frac{x_1}{2x_2}, \frac{x_2}{2x_1}$

6) $x_1^2x_2, x_1x_2^2$

А-2 *Разложение многочлена на множители*

1. Разложите многочлены на множители.

Квадратные трехчлены, корни которых угадываются по теореме Виета

1) $x^2+5x-14$

2) $x^2-11x+18$

3) x^2+x-20

4) $x^2-10x+21$

5) $x^2+11x+24$

6) $x^2+6x-27$

7) x^2-x-30

8) $x^2-13x+36$

9) $x^2+16x-57$

10) $2x^2-5x+2$

11) $2x^2+3x-2$

12) $3x^2+10x+3$

2. Сократите дроби

1) $\frac{x+3}{x^2+5x+6}$

2) $\frac{x-2}{x^2+2x-8}$

3) $\frac{x^2+3x-10}{x^2-10x+16}$

4) $\frac{x^2-6x-27}{x^2+8x+15}$

5) $\frac{x^2-12x+36}{x^2-3x-18}$

6) $\frac{x^2+5x-14}{x^2+14x+49}$

7) $\frac{x^2-4x-32}{48-3x^2}$

8) $\frac{x^2+5x-50}{0{,}1x^2-10}$

3. Упростите выражения.

1) $\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{1}{x^2-6x+5}+\frac{1}{x^2-2x-15}$

2) $\frac{x-1}{x^2-x-6}+\frac{x}{x^2+x-2}+\frac{x+1}{x^2-4x+3}$

3) $\left(\frac{x}{x^2+2x-3}-\frac{2}{x^2-1}\right):\frac{x^2-6x+9}{x^2+4x+3}$

4) $\left(\frac{2x-5}{x^2-2x-8}-\frac{x-2}{x^2-4x}\right)\cdot\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-2x+1}$

А-3 *Определение числа вещественных корней квадратного трехчлена и нахождение их по формуле*

1. Решите неполные квадратные уравнения.

1) $7x^2-28=0$

2) $\frac{1}{3}x^2-12=0$

3) $1{,}2x^2-10{,}8=0$

4) $0{,}04x^2=\frac{1}{25}$

5) $16x^2=0$

6) $0{,}5x^2-128=0$

7) $3x^2-x=0$

8) $0{,}5x-8x^2=0$

9) $6x-\frac{1}{6}x^2=0$

10) $(x^2-7x)(x^2+7)=0$

11) $(x^2+4)(x^2-4x)=0$

12) $(x^2-5)(x^2+x)=0$

13) $(2x^2-1)(2x^2-x)=0$

14) $(x^2-8x)(x-8)^2=0$

2. Для каждого из следующих уравнений относительно x с параметром a ответьте на следующие три вопроса:

– при каких значениях a уравнение имеет два корня;

– при каких значениях a уравнение не имеет корней;

– при каких значениях a уравнение имеет один корень (указать его).

1) $x^2-4x-a=0$

2) $x^2+6x+a-1=0$

3) $x^2+x+a=0$

4) $2x^2-x-4a=0$

3. Решите квадратные уравнения

1) $x^2-2x-7=0$

2) $x^2+4x-7=0$

3) $x^2+6x+1=0$

4) $x^2-8x+5=0$

5) $x^2+3x-2=0$

6) $x^2-5x+2=0$

7) $x^2+7x+\frac{1}{4}=0$

8) $x^2-9x+16=0$

9) $2x^2-6x-1=0$

10) $3x^2+12x+8=0$

11) $2x^2+3x-2=0$

12) $3x^2-2x+1=0$

А-4 *Решение симметричных систем*

1. Решите системы

1) $\begin{cases} x+y=14 \\ xy=45 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=-9 \\ xy=-36 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-y=11 \\ xy=-28 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x-5y=7 \\ xy=-8 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ xy=15 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y^2=53 \\ x+y=-9 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2-y^2=11 \\ xy=11 \end{cases}$

9) $\begin{cases} xy^2+x^2y=6 \\ xy+x+y=-5 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{17} \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x+xy=3 \\ xy^2+xy^3=12 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x+y=7 \\ x^3+y^3=133 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^3+y^3=19 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

15) $\begin{cases} x(x+y+z)=9 \\ y(x+y+z)=27 \\ z(x+y+z)=45 \end{cases}$

16) $\begin{cases} x^3=\dfrac{1}{4}yz \\ y^3=4zx \\ z^3=4xy \end{cases}$

А-5 *Решение рациональных уравнений*

1. Решите биквадратные уравнения.

1) $x^4-29x^2+100=0$

2) $x^4-130x^2+1089=0$

3) $x^4-26x^2+25=0$

4) $x^4-11x^2+18=0$

5) $16x^4-40x^2+25=0$

6) $3x^4-\dfrac{8x^2}{3}-\dfrac{1}{3}=0$

7) $2x^4+\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{7}{2}=0$

8) Дано биквадратное уравнение $x^4+(a-4)x^2+(a-1)=0$. При каком a уравнение имеет 1 корень, 2 корня, 4 корня, не имеет корней?

2. Решите уравнения заменой переменной.

1) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

2) $(x^2 + x + 1)(2x^2 + 2x + 3) = 3(1 - x - x^2)$

3) $((2x - 1)(3x - 2)) \cdot ((2x + 3)(3x - 8)) + 25 = 0$

4) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 3 = (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2 + (x + 4)^2$

5) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$

6) $(x^2 + 2x - 1)^2 + x^2 + 2x - 7 = 0$

7) $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) = 28$

8) $\left(\dfrac{x^2 + 2}{x}\right)^2 + x + \dfrac{2}{x} = 12$

9) $\dfrac{2}{x(x+3)} - \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{3}$

10) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x+5} + \dfrac{1}{x+7} = \dfrac{25}{4}$

11) $\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2 - \dfrac{1-x}{1+x} = 20$

12) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 = 90$

13) $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$

3. Решите возвратные уравнения.

1) $x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 3x + 1 = 0$

2) $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0$

3) $x^4 + x^3 + x + 1 = 4x^2$

4) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 9x + 9 = 0$

5) $x^3 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$

6) $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$

4. Решите однородные уравнения.

1) $x^4 - 3x^2(x^2 + x + 1) + 2(x^2 + x + 1)^2 = 0$

2) $(x - 2)^4 + (x - 2)^2(x + 3)^2 - 20(x + 3)^4 = 0$

3) $x^4 - 5x^2(x + 1) = 6(x + 1)^2$

4) $(2x - 1)^2 - (3x + 2)(2x - 1) - 2(3x + 2)^2 = 0$

5) $\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^2 + 5(x+3) + 6x^2 = 0$

6) $\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2 - 7(x+1) - 18 \cdot (x+2)^2 = 0$

5. Решите рациональные уравнения.

1) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = 0$

2) $\dfrac{4x^2 - 12x + 9}{x^2 + 2{,}5x - 6} = 0$

3) $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9} = \dfrac{1}{x-3}$

4) $\dfrac{3}{5x+2} - \dfrac{6}{x-2} = \dfrac{4}{3-x}$

5) $\dfrac{12x^2+30x-21}{16x^2-9}=\dfrac{3x-7}{3-4x}+\dfrac{6x+5}{4x+3}$

7) $\dfrac{x+7}{x(x-7)}-\dfrac{x-7}{x(x+7)}=\dfrac{7}{x^2-73}$

6) $\dfrac{6}{6+x-x^2}+\dfrac{3}{x^2-4}=\dfrac{8}{x^2-9}+\dfrac{4}{x^2+x-6}$

8) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{8x-13}{4(x-2)}$

7. Составьте уравнение по следующим условиям и решите его.

1) При каких значениях x дробь $\dfrac{0{,}5}{3x+1}$ больше дроби $\dfrac{1}{18x^2+12x+2}$ на 1?

2) При каких значениях x дробь $\dfrac{x^2-5}{x-1}$ в 9 раз меньше, чем $7x+10$?

3) При каких значениях x сумма дробей $\dfrac{x^2}{x^2-7x+10}$ и $\dfrac{16}{3x^2-12}$ равна 1?

4) При каких значениях x дробь $\dfrac{4}{2x^2-3x-9}$ меньше дроби $\dfrac{x^2}{2x^2+x-3}$ на $\dfrac{1}{2}$?

8. А. Многочлены, которые заменой приводятся к квадратным трехчленам

1) x^4-13x^2+36

2) $(x^2+3x)^2-8(x^2+3x)-20$

3) $x(x+1)(x+2)(x+3)-24$

4) $x^4-2x^3-4x^2+5x-6$

Б. Кубические многочлены, у которых хотя бы один целый корень угадывается как делитель свободного члена

1) x^3-2x^2-x+2

2) x^3-2x^2+3x-2

3) $x^3+6x^2+11x+6$

4) x^3-x^2-4

Соответствия

1. Корень квадратного трехчлена и его коэффициенты

А. Корень определяет коэффициент

Дан квадратный трехчлен, коэффициенты которого зависят от одного параметра a. Найдите значение параметра, если известно, что $x = 2$ является корнем трехчлена. Найдите его второй корень.

1) $x^2 + ax + 3$

2) $x^2 + 6x + a$

3) $ax^2 - 2x + 5$

4) $x^2 - (a + 1)\, x + 3 - a$

Б. Коэффициенты определяют знаки корней

Теорема Виета помогает, взглянув на уравнение, определить знаки произведения и суммы корней. Этого достаточно, чтобы определить знаки корней (если корни существуют). По виду уравнения определите, какая возможность выполняется:

а) Два положительных корня

б) Два отрицательных корня

в) Два корня разных знаков, причем бóльший по модулю положителен

г) Два корня разных знаков, причем бóльший по модулю отрицателен

д) Среди корней есть нулевой

е) Корней нет

ж) Два корня совпали (то есть уравнение имеет всего один корень)

1) $x^2 + 5x - 10 = 0$

2) $x^2 - 2x - 13 = 0$

3) $x^2 + 2x + 5 = 0$

4) $x^2 + 7x + 3 = 0$

5) $x^2 - 9x + 20 = 0$

6) $x^2 - 10x + 25 = 0$

7) $x^2 - 7x + 13 = 0$

8) $x^2 + 5x = 0$

В. Роль старшего коэффициента

В учебнике в основном встречаются квадратные трехчлены со старшим коэффициентом 1. Они имеют вид $x^2 + px + q$. В девятом классе при исследовании квадратичной функции мы рассмотрим общий случай функции вида $y = ax^2 + bx + c$ и не будем предполагать, что коэффициент a равен единице. Сейчас обратим внимание на роль старшего коэффициента при работе с корнями. Заметьте, что квадратные трехчлены $x^2 + px + q$ и $a\,(x^2 + px + q)$ при $a \neq 1$ различны, но их корни (при $a \neq 0$) одинаковы.

1) При решении уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ делим его на a и приводим к знакомому виду.

Решите уравнения

1) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

2) $2x^2 + 4x - 7 = 0$

3) $-3x^2 + 6x + 10 = 0$

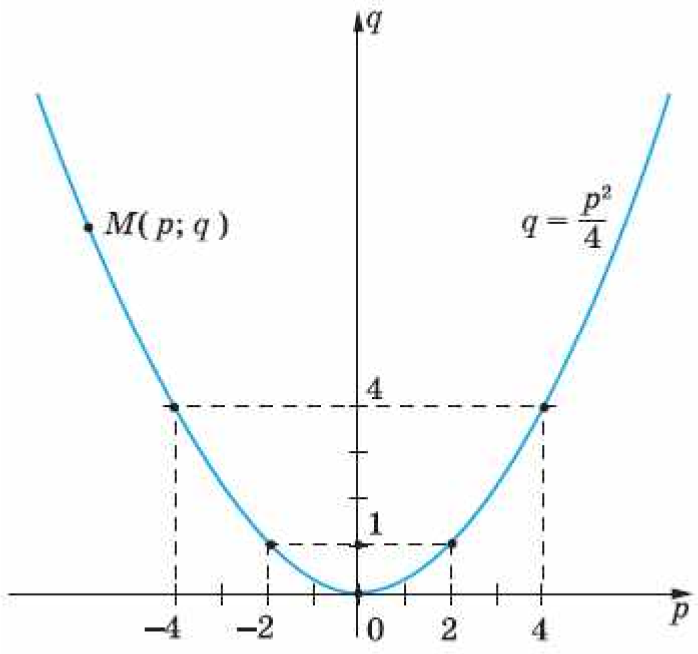
4) $\frac{3}{4}x^2-12x+1=0$

2) При нахождении суммы и произведения корней квадратного трехчлена ax^2+bx+c выносим (устно) коэффициент a: $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$. Откуда сумма корней равна $-\frac{b}{a}$, а произведение равно $\frac{c}{a}$. Найдите сумму и произведение корней уравнений предыдущего пункта.

3) При определении знаков корней трехчлена ax^2+bx+c не забываем о роли a (см. предыдущий пункт).

Найдите знаки корней (как в пункте Б этой серии) для указанных выше уравнений.

2. Введем на плоскости координаты, которые обозначим через p и q. Каждый квадратный трехчлен x^2+px+q задается парой чисел $(p; q)$ и следовательно, определяется точкой M этой плоскости с координатами $(p; q)$. Это позволяет изображать геометрически свойства трехчлена. Мы забежим немного вперед и нарисуем график функции $q=\frac{p^2}{4}$ – параболу. Для точек $M(p; q)$, лежащих на параболе, то есть для квадратных трехчленов, у которых $q=\frac{p^2}{4} \Leftrightarrow \frac{p^2}{4}-q=0$, дискриминант равен нулю. Между ветвями этой параболы (где расположена положительная полуось q) выполняется неравенство $q>\frac{p^2}{4}$, а в остальной части – противоположное неравенство $q<\frac{p^2}{4}$.



Теперь мы подготовлены к решению задач.

1) Перерисуйте аккуратно параболу $q = \frac{p^2}{4}$ в тетрадь, нанеся несколько ее точек (например, при $p = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4$).

2) Обозначьте по-разному (штриховкой или цветом) те области на плоскости, точки которых соответствуют трехчленам с различными свойствами корней:

а) два положительных корня

б) два отрицательных корня

в) два корня разных знаков, причем бóльший по модулю положителен

г) два корня разных знаков, причем бóльший по модулю отрицателен

д) среди корней есть нулевой

е) корней нет

ж) один корень, при этом положительный

з) один корень, при этом отрицательный

3) Целые точки, то есть точки с целыми координатами соответствуют трехчленам с целыми коэффициентами.

Подсчитайте число целых точек, которые соответствуют следующим условиям:

а) корней нет и $q \le 4$

б) два положительных корня и $|p| \le 5$

в) два корня и $|p| \le 5$, $|q| \le 5$

Приложения

1. Старинные задачи, приводящиеся к квадратным уравнениям

Следующие задачи взяты из школьных задачников XIX века с сохранением их стиля.

1) Некто имеет несколько телят, которые стоят 112 рублей. Если бы телят было двумя более, то каждый теленок стоил бы 2 рублями 80 коп. дешевле. Сколько было телят?

2) Один купец имеет некоторое число фунтов чая двух сортов, стоящих 1220 рублей. Число фунтов первого сорта относится к числу фунтов второго сорта как 4 : 3. Фунт первого сорта чая стоит в половину столько рублей, сколько у купца находится фунтов этого чая; а фунт второго сорта стоит 6 рублями дешевле фунта первого сорта. Сколько у купца фунтов каждого сорта чая?

3) A и B имеют вместе 100 яблок, за которые они при продаже получили поровну; если бы A продал столько яблок, сколько имеет B, то выручил бы 1 руб. 80 коп., а если бы B продал столько яблок, сколько имеет A, то выручил бы 80 копеек. Сколько яблок имел каждый?

4) Некто прошел 105 верст и находит, что если бы он на это путешествие употребил бы времени 6 днями более, то мог бы в день проходить 2 верстами менее, чем проходил теперь. Предполагая, что он шел однообразно, определить: по сколько верст он делал каждый день?

5) A и B сообща внесли капиталы на некоторое предприятие и получили по 100 рублей прибыли. A внес такой капитал, половина которого на 100 рублей менее капитала B, и прибыль его равна $\frac{3}{20}$ капитала, который внес B. Узнать: сколько каждый из них внес и по сколько они получили прибыли из 100 рублей?

6) Два каменщика, из которых второй начинает работать $1\frac{1}{2}$ днями позже первого, могут выложить стену в 7 дней. Если бы эта работа была поручена каждому отдельно, то первому для ее окончания понадобилось бы тремя днями более, чем второму. Во сколько дней каждый из них отдельно выстроит эту стену?

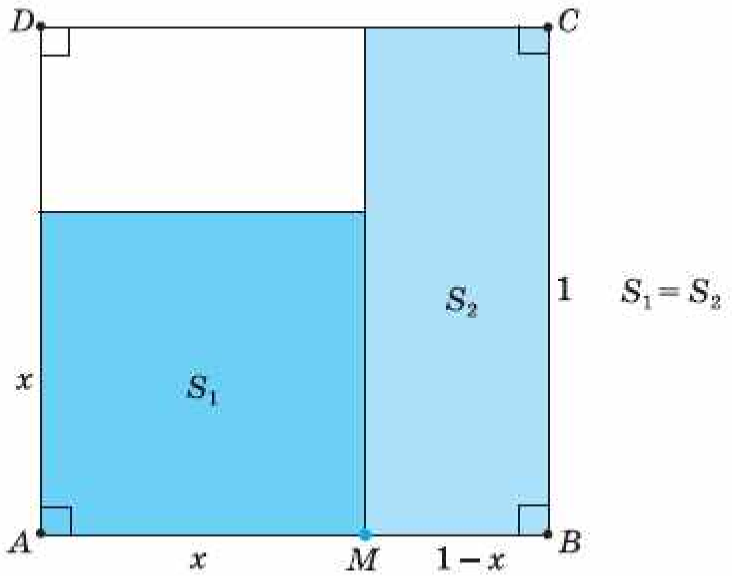
7) Некто из бочки, содержащей 81 ведро вина, отлил некоторое число ведер, а бочку долил водою; потом, от этой смеси он отлил столько же ведер, сколько и в первый раз, и опять бочку долил водою; сделав это 4 раза, в бочке осталось только 16 ведер чистого вина. По сколько ведер он отливал?

8) Два путешественника A и B отправляются одновременно в город, находящийся от них на расстоянии 90 верст; A делает в час на одну версту более, чем B, и прибывает в город ранее его часом. Сколько верст проходит каждый из путешественников в один час?

9) Корабль, заключавший 74 матроса и известное количество солдат, кроме офицеров, взял приз. Каждый матрос получил число рублей, равное $\frac{1}{3}$ числа солдат, а каждый солдат получил 3 рублями менее, нежели матрос; остальные же 768 рублей достались на долю офицеров. Но если бы офицеры ничего не получили, то каждый матрос и солдат могли бы получить число рублей, равное половине числа солдат. Сколько было солдат и сколько получил каждый из них?

2. Золотое сечение

Вторая книга «Начал» Евклида почти вся посвящена задаче: на стороне квадрата найти точку такую, чтобы квадрат, построенный на бóльшей части стороны квадрата, был бы равновелик прямоугольнику, отсекаемому от исходного квадрата меньшей стороной.



1) Обозначьте сторону исходного квадрата за 1 и вычислите сторону x требуемого квадрата.

Найдите отношение чисел x и $1-x$. Это отношение является одним из самых знаменитых чисел в математике и носит название «золотого числа», а полученное сечение отрезка, – «золотого сечения». Прямоугольник, стороны которого относятся как «золотое число» $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$, считался в древности самым приятным для глаза и широко использовался в архитектурных постройках. В пропорциях золотого сечения выдержаны, например, многие прямоугольные конструкции Парфенона – великого античного храма в Афинах.

2) Пусть $\overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ – сопряженное число с числом φ.

Рассмотрим числа $U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \overline{\varphi}^n\right)$, $n = 0$, 1, 2. Вычислите U_0, U_1, U_2, U_3, U_4.

Вспомните, встречали ли вы раньше последовательность чисел с таким началом.

3) Докажите тождество $U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$.

4) Проверьте вычислениями тождества

а) $U_{2n-1} = U_n^2 + U_{n-1}^2$

б) $U_n U_{n+1} - U_{n-2} U_{n-1} = U_{2n-1}$

Исследования и доказательства

1. Число корней квадратного трехчлена

Выделив полный квадрат, мы пишем квадратный трехчлен в виде $P(x) = x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 - d$, где $d = \frac{p^2}{4} - q = \frac{p^2 - 4q}{4}$. Нам известно, как от знака дискриминанта D (или d) зависит число вещественных корней квадратного трехчлена. Задачи этой серии предлагают другие условия, позволяющие находить число корней.

1) Докажите, что если $d < 0$, то все значения квадратного трехчлена положительны: $d < 0 \Rightarrow P(x) > 0$.

2) Докажите, что если в некоторой точке $x = a$ значение квадратного трехчлена отрицательно, то трехчлен имеет да корня.

3) Если для некоторых двух чисел a и b произведение значений $P(a) \cdot P(b) < 0$, то трехчлен имеет два корня.

4) Если $1 + p + q < 0$, то трехчлен имеет два корня.

5) Если $1 + q < p$, то трехчлен имеет два корня.

6) Если $q < 0$, то трехчлен имеет два корня.

7) Докажите, что уравнение $(x - 1)(x - 2) + (x - 2)(x - 3) + (x - 3)(x - 1) = 0$ имеет два корня.

8) Докажите, что уравнение $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ имеет два корня при любых различных между собой числах a, b и c.

2. Положительность дискриминанта

Вернемся к уравнению $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$.

1) Раскройте скобки. Запишите левую часть уравнения как $x^2 + px + q$.

2) Составьте дискриминант D получившегося трехчлена.

3) Запишите условие существования двух вещественных корней в виде $D > 0$ и докажите его.

4) Докажите, что уравнение $x^2 + \frac{a^2 + 1}{a}x + 1 = 0$ имеет корни при любом $a \neq 0$.

5) Докажите, что уравнение $x^2 + (a + b)\,x + \frac{a^2 + b^2}{2} = 0$ не имеет корней ни при каких различных a и b.

6) Пусть $p_1 p_2 = 2(q_1 + q_2)$. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ или $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ имеет вещественный корень.

3. Исследование корней квадратного уравнения с параметром

Дано квадратное уравнение относительно x, коэффициенты которого содержат параметр a: $x^2+2(a-3)x+a^2+2a=0$. Исследуйте это уравнение, ответив на следующие вопросы:

1) При каких значениях параметра a уравнение имеет нулевой корень?

2) При каких значениях a число $x = 1$ является корнем уравнения?

3) При каких значениях a уравнение имеет 2 корня, один корень или вообще не имеет корней?

4) Что можно сказать о знаках корней уравнения при $a = -1$?

5) Может ли быть так, что уравнение имеет два корня и при этом их сумма отрицательна?

6) При каком значении a трехчлен, стоящий в левой части уравнения, является полным квадратом? Найдите его.

7) При каких значениях a сумма квадратов корней равна 66? Проверьте, при каждом ли найденном значении a корни действительно существуют.

8) Рассмотрим исходное уравнение как квадратное уравнение относительно a с коэффициентами, зависящими от x.

а) Решите это уравнение при $x = 1$.

б) Вычислите его дискриминант.

в) При каких значениях x уравнение относительно a имеет 2 корня?

Комбинаторика

1. Трехчлен с целыми корнями

В задании А-1 № 1 мы перечислили все квадратные трехчлены вида $x^2 + px + q$ при $|p|$, $|q| \le 12$ с целыми коэффициентами и целыми корнями. Изучим принципы подсчета числа трехчленов с целыми корнями.

1) Подсчитайте их количество для $|q| \le 12$, исключив случай $q=0$.

2) Пусть $|q|$ – простое число. Сколько есть трехчленов с целыми корнями и с данным значением $|q|$?

3) Тот же вопрос, если $|q|$ есть квадрат простого числа.

4) Тот же вопрос, если $|q|$ есть произведение двух простых чисел.

5) Тот же вопрос, если $|q|$ есть произведение k различных простых чисел.

6) Тот же вопрос, если $|q| = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$, где p_1, p_2 – простые числа.

7) Какова вероятность того, что наугад написанный трехчлен $x^2 + px + q$ с целыми p и q, причем $|q| \le 12$, $q \ne 0$, $|p| \le 13$, имеет целые корни?