

Беседа 8 Как решали квадратные уравнения в древности

Примеры и комментарии

1. На самом деле вавилонский метод дает решение системы

$$\begin{cases} x + y = p, \\ xy = q, \end{cases} \text{ представляющей со-}$$

бой запись задачи нахождения сторон прямоугольника с данным периметром и площадью.

На сохранившихся вавилонских табличках этот метод изложен следующим образом, если использовать современные обозначения (пример взят из Йельской коллекции табличек).

Решим систему

$$x + y = \frac{13}{2}, \quad xy = \frac{15}{2}. \quad \text{Возьмем}$$

$$\frac{x + y}{2} = \frac{13}{4} \text{ и запишем } x = \frac{13}{4} + z,$$

тогда $y = \frac{13}{4} - z$ (z играет роль «ошибки», если мы приняли бы, что $x = y = \frac{13}{4}$).

$$\text{Имеем } \left(\frac{13}{4} + z\right)\left(\frac{13}{4} - z\right) = \frac{15}{2},$$

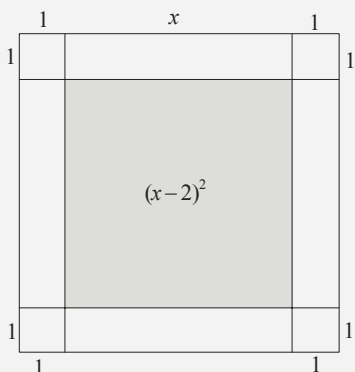
$$\text{откуда } \frac{169}{16} - z^2 = \frac{15}{2},$$

$$z^2 = \frac{169}{16} - \frac{120}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2 \text{ и } z = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Получим } x = \frac{13}{4} + \frac{7}{4} = 5,$$

$$y = \frac{13}{4} - \frac{7}{4} = \frac{3}{2}.$$

2.



Вавилон

В клинописных текстах древнего Вавилона (около 2000 лет до нашей эры) обнаружена такая задача: «Площадь в тысячу состоит из суммы двух квадратов, сторона одного из которых составляет две трети стороны другого, уменьшенные на 10. Какова сторона большего квадрата?»

Решить такую задачу – это все равно, что решить

$$\text{уравнение } x^2 + \left(\frac{2}{3}x - 10\right)^2 = 1000. \text{ В клинописном тексте}$$

нет формулы для решения этого уравнения, но перечисляются необходимые этапы вычисления, которые приводят к корню $x = 30$.

Аль-Хорезми



Знаменитое уравнение Аль-Хорезми: $x^2 + 10x = 39$ (IX век) имеет в оригинале геометрическую формулировку: «Квадрат и десять корней равны 39». Напомним геометрический метод его решения:

$$x^2 + 10x = 39$$

$\Downarrow$

$$x^2 + 4 \cdot \frac{5}{2}x + 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 39 + 25 = 64$$

$\Downarrow$

$$\left(x + 2 \cdot \frac{5}{2}\right)^2 = 8^2 \Leftrightarrow x + 5 = 8 \Leftrightarrow x = 3$$

Метод Аль-Хорезми легко видоизменить для случая, когда коэффициент при x отрицателен, записав уравнение в виде $x^2 = px + q$ ($p > 0, q > 0$).

Он проиллюстрирован на примере уравнения $x^2 = 4x + 21$:

$$(x - 2)^2 + 4x = x^2 + 4$$

$\Downarrow$

$$(x - 2)^2 + 4x + 21 = x^2 + 25$$

$\Downarrow$

$$(x - 2)^2 = 25, \quad x - 2 = 5, \quad x = 7$$

Евклид

В «Началах» Евклида (IV в. до н. э.) сформулированы в виде некоторых геометрических тождеств правила решения квадратного уравнения. Вот одна из теорем Евклида: «Если отрезок разделен на два неравных отрезка, то площадь прямоугольника, сторонами которого являются эти отрезки, сложенная с площадью квадрата, сторона которого равна их полуразности, равна площади квадрата, сторона которого равна половине исходного отрезка».

Докажем прежде всего эту геометрическую теорему. Обозначим две части данного отрезка p через x и y : $x + y = p$. Построим прямоугольник со сторонами x и y – рис. 1.

Отметим на стороне $AB = x$ отрезок $AC = \frac{x+y}{2}$ – рис. 2.

Присоединим квадрат со стороной $CB = \frac{x-y}{2}$ – рис. 3.

Построим квадрат, одна из сторон которого равна $\frac{x+y}{2} = AC$ – рис. 4.

Теорема Евклида утверждает, что сумма площадей фигур 1, 2 и 4 равна сумме площадей фигур 1 и 3, т. е. площадь прямоугольника 3 равна сумме площадей фигур 2 и 4. Это очевидно, так как фигуры 2 и 4 вместе образуют

прямоугольник со сторонами $\frac{x-y}{2}$ и $\frac{x+y}{2}$, как и прямоугольник 3. Теорему Евклида можно записать алгебраически: $xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$.

Зная площадь $xy = q$, из теоремы Евклида найдем $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$. Извлекая положительный корень,

найдем $\frac{x-y}{2}$, а зная еще $\frac{x+y}{2} = \frac{p}{2}$, легко найдем x и y :

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Это означает, что Евклид нашел геометрически формулы для корней квадратного уравнения $x^2 - px + q = 0$, так как

система $\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases}$ сводится к этим уравнениям.

Примеры и комментарии

1. Рис. 1

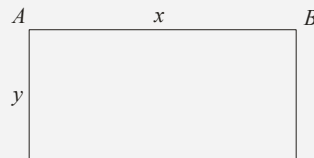


Рис. 2

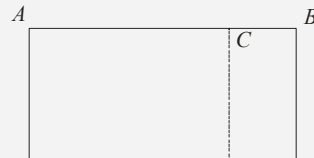


Рис. 3

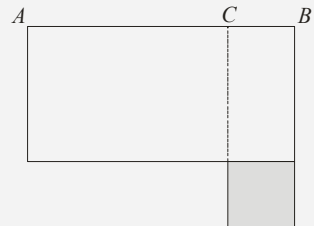
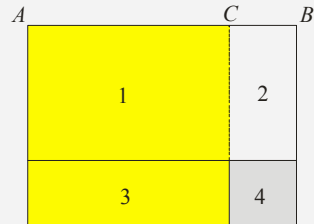


Рис. 4



2. Задачи из Вавилонских текстов

1. Площадь прямоугольника, сложенная с превышением длины по сравнению с шириной, равна 120. Сумма же длины и ширины равна 24. Найти размеры прямоугольника.

2. Я прибавил усмеренную длину стороны моего квадрата к 11 его площадям, чтобы получить $\frac{25}{4}$. Найди мой квадрат.

3. Я сложил площади двух квадратов: получил $\frac{305}{12}$. Две трети одной стороны, сложенных с пятью, дают вторую сторону. Найти квадраты.

4. Сумма сторон двух моих квадратов равна 50. Сумма их площадей, сложенная с площадью квадрата со стороной, равной превышению одной стороны над другой, равна 1400. Найти квадраты.

§ 1 Квадратный трехчлен

Примеры и комментарии

1. Квадратный трехчлен $x^2 + 5x + 6$ легко раскладывается на множители методом группировки:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= x^2 + 2x + 3x + 6 = \\ &= x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3). \end{aligned}$$

Его корнями будут числа $x_1 = -2$, $x_2 = -3$.

2. Подставим в трехчлен $x^2 + px + q$ число $x = 1$. Получим число $1 + p + q$ – сумму коэффициентов трехчлена. Если это число равно нулю, то $x = 1$ является корнем трехчлена. Это соображение позволяет быстро проверять, не является ли число $x = 1$ корнем трехчлена.

Например, у квадратного трехчлена $x^2 - 100x + 99$ сумма коэффициентов равна нулю. Значит, он делится на $x - 1$. Выделяем множитель $x - 1$ и раскладываем на множители:

$$\begin{aligned} x^2 - 100x + 99 &= x^2 - x - 99x + 99 = \\ &= x(x - 1) - 99(x - 1) = \\ &= (x - 1)(x - 99). \end{aligned}$$

3. Если коэффициенты p и q – целые числа, и число $x = a$ является корнем квадратного трехчлена $x^2 + px + q$, то q делится на a . Действительно, записав числовое равенство $a^2 + pa + q = 0$ и перенеся q в другую часть, получим $a(a + p) = -q$, т. е. q делится на a . Это соображение позволяет находить целые корни трехчлена с целыми коэффициентами подбором.

Например, целыми корнями трехчлена $x^2 - 9x - 22$ могут быть только делители числа 22, т. е. числа $\pm 1, \pm 2, \pm 11, \pm 22$. Проверкой убеждаемся, что $x = -2$ является корнем: $(-2)^2 - 9 \cdot (-2) - 22 = 0$.

Многочлен второй степени со старшим коэффициентом 1 будем называть *квадратным трехчленом*. Квадратный трехчлен можно записать в виде

$$P(x) = x^2 + px + q.$$

Корень квадратного трехчлена (как и корень любого многочлена) – это такое число, при подстановке которого трехчлен обращается в нуль:

$$x = a \text{ корень } P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0.$$

Наличие корня тесно связано с разложением на множители.

Теорема 1. Если квадратный трехчлен $P(x)$ делится на двучлен $x - a$, то $x = a$ является корнем $P(x)$.

Доказательство. Дано, что $P(x)$ делится на $x - a$. Это означает, что можно записать тождество $P(x) = (x - a)Q(x)$ с некоторым многочленом $Q(x)$. Подставляя в это тождество $x = a$, получим $P(a) = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 (обратная к теореме 1). Если $x = a$ является корнем трехчлена $P(x)$, то этот трехчлен делится на $x - a$.

Доказательство. По условию a является корнем квадратного трехчлена, т. е. число $a^2 + pa + q$ равно нулю. «Вычтем нуль» из трехчлена:

$$- \frac{x^2 + px + q}{a^2 + pa + q} = \frac{x^2 + px + q}{x^2 - a^2 + p(x - a)}$$

Итак, $x^2 + px + q = x^2 - a^2 + p(x - a) = (x - a)(x + a) + p(x - a) = (x - a)(x + p + a)$. Теорема доказана.

Теорема 3. Если квадратный трехчлен имеет хотя бы один корень $x = a$, то он раскладывается в произведение двух линейных множителей: $P(x) = (x - a)(x - b)$.

Доказательство. По теореме 2 можно записать тождество $P(x) = (x - a)Q(x)$. Так как степень произведения равна сумме степеней сомножителей, то многочлен $Q(x)$ имеет степень 1, т. е. является линейным. Его старший коэффициент должен равняться 1, т. е. $Q(x)$ можно записать в виде $x - b$. Теорема доказана.

На самом деле, требуемое разложение на множители мы уже получили в ходе доказательства теоремы 2, записав равенство $x^2 + px + q = (x - a)(x + p + a)$. Из этого

Формулы Виета

Теорема 4 (теорема Виета). Если квадратный трехчлен $P(x) = x^2 + px + q$ разложен в произведение двух линейных множителей с корнями a и b , т. е. если $x^2 + px + q = (x - a)(x - b)$, то сумма этих корней равна коэффициенту при x с противоположным знаком, а их произведение равно свободному члену:

$$\begin{aligned}a + b &= -p \\ ab &= q\end{aligned}$$

Написанные формулы называются формулами Виета, в честь французского математика Ф. Виета (1739–1783).

Доказательство. Запишем тождество $x^2 + px + q = (x - a)(x - b)$ и раскроем скобки в правой части:

$$x^2 + px + q = x^2 - ax - bx + ab = x^2 - x(a + b) + ab.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, получим требуемые формулы.

Теорема 5 (обратная к теореме Виета). Если числа a и b удовлетворяют соотношениям $a + b = -p$ и $ab = q$, то квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ раскладывается на множители: $x^2 + px + q = (x - a)(x - b)$.

Доказательство. Подставим вместо p и q их выражения через a и b и воспользуемся способом группировки:

$$\begin{aligned}x^2 + px + q &= x^2 - (a + b)x + ab = \\ &= x^2 - ax - bx + ab = x(x - a) - b(x - a) = \\ &= (x - a)(x - b).\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Если числа a и b различны, то трехчлен $x^2 + px + q$, где $p = -(a + b)$, $q = ab$, имеет ровно два корня a и b , что следует из теоремы 5: $x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow (x - a)(x - b) = 0 \Leftrightarrow x = a$ или $x = b$.

Если $a = b$, то трехчлен $x^2 + px + q$, где $p = -(a + a) = -2a$, $q = a^2$, является полным квадратом и имеет один корень $x = a = -\frac{p}{2}$: $x^2 + px + q = (x - a)(x - a) = (x - a)^2$.

Итак, если числа a и b связаны равенствами $a + b = -p$ и $ab = q$, то они являются корнями квадратного трехчлена $x^2 + px + q$. При этом если эти числа различны, то трехчлен имеет два корня, а если равны, то один. В последнем случае из-за того, что трехчлен является квадратом $(x^2 + px + q = (x - a)^2)$, корню $x = a$ приписывают *кратность* – говорят, что это *корень кратности 2*.

Примеры и комментарии

1. Теорема Виета позволяет угадывать целые корни квадратного трехчлена. Например, решая уравнение $x^2 - 5x - 14 = 0$ можно попытаться разложить свободный член, число -14 , на два множителя (с учетом знаков) так, чтобы их сумма равнялась числу 5 (второму коэффициенту с обратным знаком). Числа $x = -2$ и $x = 7$ удовлетворяют этим условиям: $(-2) \cdot 7 = -14$ и $-2 + 7 = 5$.

То, что эти числа действительно являются корнями, можно не проверять, так как условий $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$ **достаточно** для того, чтобы числа x_1 и x_2 были корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ (теорема 5).

2. Составим трехчлен, корнями которого являются числа $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

Найдем $x_1 + x_2 = 1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}$ и $x_1 x_2 = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = -1$. Запишем квадратный трехчлен $x^2 - 2x - 1 = 0$. Его корнями являются числа x_1 и x_2 .

3. Разложить на множители трехчлен $x^2 - 4x - 21$.

Корни трехчлена подбираются устно: $x_1 = 7$, $x_2 = -3$ (произведение их модулей равно 21 , они разных знаков, причем больший по модулю положителен). Получаем ответ: $x^2 - 4x - 21 = (x - 7)(x + 3)$.

4. Разложить на множители трехчлен $x^2 - 20x + 100$.

Допустим, что мы не заметили, что этот трехчлен является полным квадратом, но догадались до одного корня $x_1 = 10$:

$$10^2 - 20 \cdot 10 + 100 = 0.$$

Тогда формулы Виета подскажут, что этот корень единственный: $a = 10$, $a + b = 20 \Rightarrow b = 10$.

§ 2 Корни квадратного уравнения

Примеры и комментарии

1. Уравнение *приводится к квадратному*, если преобразованиями, сохраняющими все его корни, оно сводится к уравнению вида $x^2 + px + q = 0$. Разумеется, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ при $a \neq 0$ приводится к квадратному делением на старший коэффициент a . Его обычно тоже называют квадратным уравнением.

2. Уравнение $x^2 + px + q = 0$, у которого хотя бы один из коэффициентов равен нулю, называют *неполным*. Неполные уравнения решаются легко.

1) Пусть $q = 0$. Тогда $x^2 + px = 0 \Leftrightarrow x(x + p) = 0$. Если $p \neq 0$, то это уравнение имеет два корня $x = 0$ и $x = -p$. При $p = 0$ корень единственный $x = 0$.

2) Пусть $p = 0$. Тогда $x^2 + q = 0 \Leftrightarrow x^2 = -q$. Если $q < 0$, то $-q > 0$ и уравнение имеет два корня $x = \sqrt{-q}$ и $x = -\sqrt{-q}$ (по определению квадратного корня). Если $q > 0$, то уравнение корней не имеет.

3. Уравнение $x^2 = c^2$ ($c \neq 0$) имеет два корня: $x = -c$ и $x = c$. Можно употреблять запись $x = \pm c$.

Решение уравнения вида $(x - a)^2 = c^2$ надо записывать сразу: $x - a = \pm c$, $x = a \pm c$.

Уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ называется *квадратным уравнением*.

Сколько корней может иметь квадратное уравнение?

Примеры

1. Уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ имеет *два корня*.

Действительно, разложим квадратный трехчлен $x^2 - 5x + 6$ на множители: $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Произведение $(x - 2)(x - 3)$ равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю: $x - 2 = 0$; $x = 2$; $x - 3 = 0$; $x = 3$.

2. Уравнение $x^2 - 4x + 4 = 0$ имеет *один корень*.

Действительно, так как $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, то $(x - 2)^2$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x - 2 = 0$, т. е. при $x = 2$.

3. Уравнение $x^2 + 2x + 2 = 0$ корней *не имеет*.

Действительно, $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1$. Выражение $(x + 1)^2 + 1$ не может обратиться в нуль, так как тогда $(x + 1)^2 = -1$, но квадрат числа не может равняться отрицательному числу -1 .

Число корней квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ связано с разложением многочлена $x^2 + px + q$ на множители, которое мы обсудили в предыдущем параграфе.

Из его результатов можно сделать следующие выводы.

1) Если a — корень уравнения $x^2 + px + q = 0$, то число $-p - a$ также является его корнем. При этом если $a \neq -\frac{p}{2}$, то корни $x = a$ и $x = -p - a$ различны.

2) Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ не может иметь более двух корней, так как мы доказали, что квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не может иметь более двух корней.

3) Если число $a = -\frac{p}{2}$ является корнем уравнения $x^2 + px + q = 0$, то этот корень единственный. Действительно, в этом случае квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ будет полным квадратом $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$. Заметьте, что тогда q должно равняться $\frac{p^2}{4}$.

Выделение полного квадрата

Наиболее общим способом разложения квадратного трехчлена (а значит, и нахождения его корней) является способ выделения полного квадрата.

Примеры

1. $P = x^2 + 2x - 3$

Выделяем полный квадрат: $x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1 - 3 - 1 = (x + 1)^2 - 4 = (x + 1)^2 - 2^2 = (x - 1)(x + 3)$.

2. $P = x^2 + 2x - 1$

Квадратный трехчлен P целых корней не имеет. Попробуем выделить полный квадрат:

$$x^2 + 2x - 1 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 1 = (x + 1)^2 - 2.$$

Число 2 не является квадратом целого числа. Это является причиной того, что данный трехчлен не имеет целых корней. Воспользуемся квадратными корнями:

$$2 = (\sqrt{2})^2. \text{ Получим}$$

$$(x + 1)^2 - 2 = (x + 1)^2 - (\sqrt{2})^2 = (x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2}).$$

Одновременно с разложением на множители мы получили и выражения для корней квадратного уравнения $x^2 + 2x - 1 = 0$: $x + 1 - \sqrt{2} = 0$, $x = -1 + \sqrt{2}$, $x + 1 + \sqrt{2} = 0$, $x = -1 - \sqrt{2}$.

Ответ: $x_1 = -1 + \sqrt{2}$, $x_2 = -1 - \sqrt{2}$, или $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

3. $P = x^2 + 2x + 2$

$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1 = (x + 1)^2 - (-1)$. В этом случае нет ни рационального, ни иррационального числа, квадрат которого равнялся бы числу -1 . Метод выделения полного квадрата не помог разложить трехчлен на множители. То, что он вообще не раскладывается на множители, мы доказываем, привлекая свойства неравенств: выражение $(x + 1)^2 + 1$ строго положительно при всех значениях x , поэтому оно не обращается в нуль, а значит, не может иметь линейный множитель, который заведомо обращается в нуль.

Проверь себя

1. Сколько корней может иметь квадратное уравнение?
2. При каком условии квадратное уравнение имеет один корень?
3. Приведите пример квадратного уравнения, не имеющего корней.
4. Какие целые числа могут быть корнями квадратного уравнения с целыми коэффициентами?

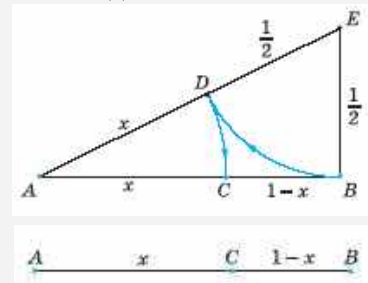
Примеры и комментарии

1. Разложить на множители трехчлен $x^2 - 6x - 91$.

Число 91 раскладывается на множители: $91 = 7 \cdot 13$. Целые корни могут быть среди делителей числа 91, т. е. среди чисел $\pm 1, \pm 7, \pm 13, \pm 91$. С помощью теоремы Виета видно, что они должны быть разных знаков, причем больший по модулю должен быть положительным. Составляя две возможные разности для пар множителей $91 = 1 \cdot 91 = 7 \cdot 13$, видим, что $91 - 1 = 90$, $13 - 7 = 6$. Получаем $x_1 = -7$, $x_2 = 13$. Значит, $x^2 - 6x - 91 = (x + 7)(x - 13)$.

2. Заметим, что уравнение $x^2 - x - 1 = 0$ с самыми маленькими (по модулю) целыми коэффициентами, но не имеющее целых корней, появляется в знаменитой задаче о золотом сечении (см. рисунок), а его положительный корень $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1,618$ часто

называют «золотым числом» или числом Фидия.



$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}, x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$$

3. Найдем число, обратное к числу

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} : x_1^{-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$\approx 1,618$.

Иногда «золотым числом» называют не число $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, а обрат-

ное к нему: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

§ 3 Формула

Примеры и комментарии

Решая квадратное уравнение с числовыми коэффициентами, не надо сразу подставлять эти коэффициенты в формулу.

1. Сначала посмотрите, не является ли это уравнение неполным, т. е. не записано ли оно в виде $x^2 + px = 0$ ($q = 0$) или $x^2 + q = 0$ ($p = 0$) или $(x - a)^2 = b^2$.

В этих случаях корни записываются без дополнительных преобразований.

2. Если все коэффициенты целые, попробуйте подобрать целые корни, используя формулы Виета. Подбрав один корень, вы немедленно найдете другой.

3. Если так не получается, найдите дискриминант $D = p^2 - 4q$. Если он положителен и является полным квадратом, $D = a^2$, то ответ запишется без радикалов: $x = -\frac{p}{2} \pm \frac{a}{2}$.

4. Если $D < 0$, то вычислять ничего не надо – корней нет.

5. Если $D = 0$, то это знак того, что трехчлен является полным квадратом и корень уравнения единственный $x = -\frac{p}{2}$.

6. Для того чтобы квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ был полным квадратом, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант $D = p^2 - 4q$ был равен нулю, т. е. чтобы выполнялось равенство $p^2 = 4q$.

7. Лишь после того, как указанные частные случаи рассмотрены, запишите формулу.

Проверь себя

1. Что такое дискриминант квадратного трехчлена?
2. Как с помощью дискриминанта можно определить число корней квадратного уравнения?
3. При каком условии квадратный трехчлен является полным квадратом?

Пусть дано квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$. Выделим полный квадрат из трехчлена $P = x^2 + px + q$.

$$\begin{aligned} P &= x^2 + px + q = \\ &= x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4}. \end{aligned}$$

Обозначим число $p^2 - 4q$ через $D = p^2 - 4q$ и назовем его **дискриминантом** квадратного трехчлена P .

$$P = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{D}{4}.$$

Теорема. Решение квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ зависит от знака его дискриминанта, числа $D = p^2 - 4q$.

1) Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня, вычисляемые по общей формуле $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$.

2) Если $D = 0$, то уравнение имеет один корень $x = -\frac{p}{2}$.

3) Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Доказательство

1. $D > 0$. Тогда D является квадратом числа $\sqrt{D}$ и мы разложим трехчлен P на два множителя:

$$P = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2}\right) \left(x + \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2}\right).$$

Приравнивая P к нулю, получаем два корня исходного квадратного уравнения: $x_1 = -\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2}$ и $x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2}$.

Иногда их объединяют одной формулой: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}$,

$$\text{или } x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}.$$

2. $D = 0$. Тогда P является полным квадратом: $P = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$.

Квадратное уравнение $P = 0$ имеет один корень $x = -\frac{p}{2}$.

3. $D < 0$. Дальнейшее разложение невозможно. Уравнение $P = 0$, которое можно записать в виде $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{D}{4}$ не имеет решений, так как справа стоит отрицательное число, а слева – квадрат.

Уравнение общего вида

Уравнение $x^2 + px + q = 0$, у которого первый коэффициент равен единице, иногда называют *приведенным*. Уравнение общего вида $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) можно сделать приведенным, поделив обе его части на a : $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}}}{2} = \frac{-\frac{b}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Число $b^2 - 4ac$ в этом случае называют дискриминантом квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Уравнение общего вида $ax^2 + bx + c = 0$ можно сделать приведенным, умножив обе его части на старший коэффициент a : $a^2x^2 + abx + ac = 0$.

Заменим неизвестное: $ax = y$. Получим приведенное уравнение относительно y : $y^2 + by + ac = 0$.

Решив его, найдем $x = \frac{y}{a}$.

Применяя формулу корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ в случае, когда p – четное число, нам выгоднее под радикалом сразу иметь число $\frac{D}{4} = \frac{p^2 - 4q}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, чтобы не надо было потом сокращать на 2. Иногда вводят обозначение для «маленького» дискриминанта $d = \frac{D}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$. Разумеет-

ся, знаки d и D совпадают и исследование корней можно делать с помощью числа d . Формулу для корней можно записать так: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{d}$.

Исследование квадратного уравнения

Дано квадратное уравнение $x^2 - 4x + a + 1 = 0$. Найти его корни в зависимости от параметра a .

1. Вычислим «маленький» дискриминант уравнения: $d = 2^2 - (a + 1) = 4 - a - 1 = 3 - a$. Рассмотрим три случая.

а) $D < 0 \Leftrightarrow 3 - a < 0 \Leftrightarrow a > 3$. Решений нет.

б) $D = 0 \Leftrightarrow a = 3$. Корень один $x = -\frac{p}{2} = 2$.

в) $D > 0 \Leftrightarrow a < 3$. Уравнение имеет два корня $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3 - a}$.

Примеры и комментарии

1. Задача нахождения корней квадратного уравнения $P = 0$ равносильна задаче разложения квадратного трехчлена P на два линейных множителя. Для решения уравнения, равно как и для разложения на множители разности $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{D}{4}$, надо уметь из-

влекать квадратный корень из дискриминанта D . Если мы хотим ограничиться только рациональными числами, то нам надо, чтобы дискриминант D был квадратом рационального числа.

Если мы рассматриваем все вещественные числа, то нам надо, чтобы дискриминант D был не меньше 0, так как в этом и только в этом случае из него можно извлечь квадратный корень.

2. Найти корни квадратных уравнений.

а) $x^2 + 6x - 1 = 0$

Целых корней нет. Вычисляем «маленький» дискриминант $d = 3^2 + 1 = 10 > 0$. Два корня.

Ответ: $-3 \pm \sqrt{10}$.

2) $x^2 + 4x + 6 = 0$

Поступаем аналогично:

$d = 2^2 - 6 = -2 < 0$. Вещественных корней нет. Ответ: $\emptyset$.

3) $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$

$D = 1^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 - 1 = 0$.

Корень один: $x = -\frac{1}{2}$. Ответ: $-\frac{1}{2}$.

4) $2x^2 + 6x + 3 = 0$

Сначала делим обе части уравнения на 2: $x^2 + 3x + \frac{3}{2} = 0$.

$D = (-3)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} = 9 - 6 = 3 > 0$.

Два корня. Ответ: $-\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Можно, конечно, пользоваться и общей формулой.

§ 4 Симметричные системы

Примеры и комментарии

Решить системы уравнений.

$$1. \begin{cases} xy = -1, \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases} \quad \text{Делаем замену}$$

$x + y = u, \quad xy = v.$ Преобразуем второе уравнение системы:

$$\begin{cases} v = -1, \\ u^2 - 2v = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = -1, \\ u^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v = -1, \\ u = 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} v = -1, \\ u = -2. \end{cases}$$

Получаем две системы: $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -1 \end{cases}$

и $\begin{cases} x + y = -2, \\ xy = -1. \end{cases}$ Решаем первую из

$$\text{них: } t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Получаем первые два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{2}, \\ y_1 = 1 - \sqrt{2}; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1 - \sqrt{2}, \\ y_2 = 1 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

Вторую систему решаем аналогично:

$$t^2 + 2t - 1 = 0 \Rightarrow t_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Получаем еще два решения:

$$\begin{cases} x_3 = -1 + \sqrt{2}, \\ y_3 = -1 - \sqrt{2}; \end{cases} \begin{cases} x_4 = -1 - \sqrt{2}, \\ y_4 = -1 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y = 5, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Имеем $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$. Зная из

первого уравнения значение суммы $x + y$, найдем из второго уравнения значение произведения:

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{5}{xy} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow xy = 6.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Решения квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ и системы уравнений, относительно неизвестных x_1 и x_2 равносильны в следующем смысле.

1. Если числа x_1, x_2 удовлетворяют уравнению, то они удовлетворяют и системе (теорема Виета).

2. Если числа (x_1, x_2) являются решением системы, то они удовлетворяют и уравнению.

По теореме, обратной к теореме Виета, из соотношений $x_1 + x_2 = -p, x_1 x_2 = q$ следует, что имеет место разложение трехчлена на множители: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$.

Ясно, что отсюда следует, что числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Это же самое можно получить и непосредственно, решая систему подстановкой: из первого уравнения системы выразим x_2 и подставим во второе: $x_2 = -p - x_1, x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot (-p - x_1) = q$. Получаем $-x_1^2 - px_1 = q$ или $x_1^2 + px_1 + q = 0$. Это означает, что число x_1 является корнем квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Если бы, наоборот, мы выразили x_1 через x_2 , то получили бы для x_2 аналогичное соотношение: $x_2^2 + px_2 + q = 0$.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$.

Составляем квадратное уравнение $t^2 - 5t + 6 = 0$, находим его корни $t_1 = 2, t_2 = 3$ и получаем два решения системы:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases}.$$

Комментарий. Неизвестные x и y входят в систему симметрично. Найдя одно решение, мы сразу получаем и другое.

Уравнение, которому удовлетворяют x и y , является *вспомогательным*. Неизвестное в этом уравнении мы обозначили новой буквой t .

Если бы мы решали систему подстановкой, то, конечно, получили бы такое же уравнение, но после выкладок: $y = 5 - x, x(5 - x) = 6 \Leftrightarrow 5x - x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$.

Использование симметрии

Мы уже видели, что симметричные многочлены с двумя буквами x и y могут быть выражены через сумму $u = x + y$ и произведение букв $v = xy$.

Например, $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$

$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = u^3 - 3uv$

$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = u^4 + 4v^2 - 4u^2v - 2v^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2$

$(x - y)^2 = u^2 - 4v$ и т. п.

Системы, составленные из симметричных многочленов, можно тем самым свести к системам относительно u и v .

Примеры

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$.

Выражаем $x^2 + y^2$ через $u = x + y$ и $v = xy$: $x^2 + y^2 = u^2 - 2v$. Из первого уравнения $u = 4$. Второе уравнение принимает вид: $4^2 - 2v = 10$, откуда $2v = 6$ и $v = 3$.

Приходим к знакомой системе $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$ и, составив

вспомогательное уравнение $t^2 - 4t + 3 = 0$, находим его

корни: $t_1 = 1$; $t_2 = 3$. Ответ: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 1 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = -6. \end{cases}$ Первое уравнение системы не является

симметричным относительно x и y , однако оно симметрично относительно x и $(-y)$. Произведение этих новых неизвестных легко найти из второго уравнения: $xy = -6 \Rightarrow x \cdot (-y) = +6$. Получаем симметричную систему

относительно x и $-y$: $\begin{cases} x + (-y) = 7, \\ x \cdot (-y) = 6. \end{cases}$ Составляем и решаем

вспомогательное уравнение: $t^2 - 7t + 6 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 6$.

Если $x = 1$, то $-y = 6$, т. е. $y = -6$ и наоборот.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = -6; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 6, \\ y_2 = -1. \end{cases}$

Примеры и комментарии

1. Решить систему $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^4 + y^4 = 82 \end{cases}$

Выражая $x^4 + y^4$ через u и v , запишем второе уравнение в виде $4^4 - 4 \cdot 16v + 2v^2 = 82$, или $2v^2 - 64v + 174 = 0$, $v^2 - 32v + 87 = 0$.

Решая квадратное уравнение относительно v (подбором, используя формулы Виета), получаем $v_1 = 3, v_2 = 29$. Далее решаем две стандартные системы:

1) $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 3, y_1 = 1 \\ x_2 = 1, y_2 = 3 \end{matrix}$

2) $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 29 \end{cases}$ Дискриминант

$p^2 - 4q = 4^2 - 29 < 0$.

Следовательно, система решений не имеет.

Ответ: $(3; 1), (1; 3)$.

2. $\sqrt{x} + \sqrt{13 - x} = 5$

Это уравнение легко свести к симметричной системе, сделав замену $\sqrt{x} = u, \sqrt{13 - x} = v$: $x = u^2$,

$13 - x = v^2. \begin{cases} u + v = 5 \\ u^2 + v^2 = 13 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x^2 + 3xy + y^2 = -1 \end{cases}$

Воспользуемся выражением $x^3 + y^3$ через u и v :

$\begin{cases} u(u^2 - 3v) = 7 \\ u^2 + v = -1 \end{cases}$

Из второго уравнения $v = -1 - u^2$ подставляем в первое:

$u^3 + 3u(u^2 + 1) = 7, 4u^3 + 3u - 7 = 0, (u - 1)(4u^2 + 4u + 7) = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} u - 1 = 0 \\ 4u^2 + 4u + 7 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$

$u = 1$.

Далее решаем систему $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = -1 \end{cases}$

Проверь себя

1. В чем состоит теорема, обратная к теореме Виета?
2. Как эта теорема применяется для решения симметричных систем?
3. Приведите пример уравнения, для решения которого полезно составить симметричную систему.

§ 5 Задачи, приводящиеся к квадратным уравнениям

Примеры и комментарии

1. Есть много старинных задач, приводящихся к системам уравнений. Вот задача из старинного русского задачника. Некто имеет несколько телят, которые стоят 112 рублей. Если бы телят было двумя более, то каждый теленок стоил бы 2 рублями 80 копейками дешевле. Сколько было телят?

Для решения задачи обозначим через x исходное число телят и через y исходную цену одного теленка. Составляем систему:

$$\begin{cases} xy = 112 \\ (x+2)(y-2,8) = 112 \end{cases}$$

Раскроем скобки и подставим xy из первого уравнения:

$$xy + 2y - 2,8x - 5,6 = 112 \Rightarrow$$

$$2y - 2,8x = 5,6 \Rightarrow y - 1,4x = 2,8.$$

Теперь проще всего подставить $y = 1,4x + 2,8$ в первое уравнение.

$$\text{Получим } 1,4x^2 - 2,8x - 112 = 0$$

$$x^2 - 2x - 80 = 0$$

$$x_1 = 8; x_2 = -10$$

Второй корень не имеет смысла.

Ответ: 8 телят.

2. В задачах на составление уравнений надо всегда проверять, имеют ли смысл найденные корни. В примере 1, где находилось число участников турнира, и в предыдущей задаче, где искали число телят, ответ должен быть целым числом.

Сложнее происходит исследование корней уравнения с буквенными коэффициентами. Например, уравнение в примере 3 о движении поезда приводится к квадратному уравнению

$$x^2 + 2x \left(\frac{a}{t} - \frac{s}{t} \right) - as = 0.$$

Проверьте, что это уравнение всегда имеет один положительный корень.

Рассмотрим несколько задач, для решения которых составляется квадратное уравнение (или система).

1. На шахматном турнире всего было сыграно 66 партий. Сколько человек приняло участие в турнире?

Решение. Пусть в турнире участвовало x человек. Каждый из них сыграл с каждым и общее число партий равно числу пар, которые можно составить из x человек.

Формула для числа пар нам известна: $C_x^2 = \frac{x(x-1)}{2}$.

Составим и решим квадратное уравнение: $\frac{x(x-1)}{2} = 66 \Leftrightarrow x^2 - x - 132 = 0$. $x_1 = 12$, $x_2 = -11$. Второй корень не имеет смысла.

Ответ: 12 человек.

2. а) В одну сторону поезд шел с некоторой скоростью x , в обратную – со скоростью, увеличенной на a . Известен путь s и общее время t . Найти исходную скорость.

Уравнение получается сложением времени движения на

двух участках: $\frac{s}{x} + \frac{s}{x+a} = t$.

б) Одна труба наполняет бассейн за некоторое количество часов (x), а другая тратит на эту работу на a часов меньше. Две трубы, работая вместе, наполняют бассейн за t часов. За сколько часов его наполняет первая труба?

Отношения $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x-a}$ можно считать

производительностями труб (доля работы, выполняемая за 1 ч). При совместной работе производительности

складываются: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} = \frac{1}{t}$.

в) Двое рабочих, работая вместе, выполняют работу на a часов быстрее, чем если бы первый рабочий работал один. Второй, работая один, выполняет работу за t часов. За сколько часов (x) выполняет работу первый рабочий?

Производительность первого рабочего – $\frac{1}{x}$, второго – $\frac{1}{t}$,

суммарная – $\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{t}$.

Уравнения, получившиеся во всех этих задачах, приводятся к квадратным после освобождения от знаменателей и простых преобразований.

Уравнения, приводящиеся к квадратным

1. Биквадратные уравнения

Так называют неполные уравнения четвертой степени вида $x^4 + px^2 + q = 0$ (отсутствуют слагаемые нечетных степеней).

Заменяя x^2 на новую неизвестную t , получим квадратное уравнение для нахождения t : $t^2 + pt + q = 0$. Найдя корни этого уравнения, определим x из соотношения $x^2 = t$.

2. Возвратные уравнения

Так называют уравнения четвертой степени с симметрично расположенными коэффициентами:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

Эти уравнения решают делением на x^2 и заменой $x + \frac{1}{x} = t$.

3. $x^4 + (4-x)^4 = 82$. Это уравнение четвертой степени сводится к симметричной системе заменой $4-x = y$.

Получаем
$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 82, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Пример. Решить уравнение $x^4 + 3x^3 + \frac{13}{4}x^2 + 3x + 1 = 0$.

Делим обе части на x^2 и группируем слагаемые:

$$x^2 + 3x + \frac{13}{4} + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{13}{4} = 0.$$

Заметим, что

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \text{ и } x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2.$$

Заменим $x + \frac{1}{x}$ на t : $t^2 + 3t + \frac{13}{4} - 2 = 0$, $t^2 + 3t + \frac{5}{4} = 0$,

$$t_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{5}{4}} = -\frac{3}{2} \pm 1, \quad t_1 = -\frac{5}{2}, \quad t_2 = -\frac{1}{2}.$$

Закончите самостоятельно решение уравнения.

Проверь себя

1. Как формулируется теорема, обратная к теореме Виета?

2. К какому квадратному уравнению можно свести симметричную систему $\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$?

3. Сколько корней может иметь биквадратное уравнение?

Примеры и комментарии

1. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0, x^2 = t$

$$t^2 - 3t - 4 = 0, t_1 = 4, t_2 = -1$$

$x^2 = 4, x_{1,2} = \pm 2, x^2 = -1$ – корней нет.

Ответ: $x_{1,2} = \pm 2$.

2. Обобщение биквадратного уравнения

$$(x^2 - 5x + 2)^2 - 3(x^2 - 5x + 2) - 10 = 0$$

Делаем замену $x^2 - 5x + 2 = y$.

Получаем квадратное уравнение: $y^2 - 3y - 10 = 0, y_1 = -2, y_2 = 5$.

$$x^2 - 5x + 2 = -2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0;$$

$$x_1 = 1, x_2 = 4$$

$$x^2 - 5x + 2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 = 0;$$

$$x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$$

Ответ: 1; 4; $\frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

3. Алгебраическое однородное уравнение

$$(x-2)^4 + (x-2)^2(x+3)^2 -$$

$$20(x+3)^4 = 0$$

Делим на $(x+3)^4$ ($x = -3$ не является корнем):

$$\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^4 + \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 - 20 = 0.$$

Делаем замену $\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 = y$.

Получаем $y^2 + y - 20 = 0; y_1 = 4, y_2 = -5$.

$$\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+3} = \pm 2;$$

$$\frac{x-2}{x+3} = 2 \Leftrightarrow x_1 = -8$$

$$\frac{x-2}{x+3} = -2 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{4}{3}$$

$$\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 = -5 - \text{решений нет.}$$

Ответ: $-8; -\frac{4}{3}$.

Беседа 9 Корень многочлена

Примеры и комментарии

1.



Ф. Виета (1540–1603)

Виета предложил решать кубическое уравнение $x^3 + px + q = 0$

заменой $x = \frac{p}{3t} - t$.

Проверьте, что при этой замене уравнение превращается в квадратное относительно t^3 .

Решите методом Виета уравнение $x^3 + 81x - 702 = 0$.

2. Формулы Виета

Если мы сумели полностью разложить многочлен P на линейные множители

$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$, то перемножая n скобок и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, мы получим связь между некоторыми симметричными выражениями от корней многочлена и коэффициентами.

Например, не вычисляя корней многочлена $x^3 - 3x^2 + 5x + 2$, перемножим три скобки $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ и напишем равенства:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 5, \\x_1x_2x_3 &= -2.\end{aligned}$$

Аналогично получаются формулы Виета для многочлена любой степени.

Квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ можно рассматривать как частный случай общего понятия многочлена. Многочлен с буквой x , степени n и старшим коэффициентом 1 можно записать в таком виде:

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0.$$

Индекс k (номер) коэффициента a_k соответствует степени соответствующего одночлена a_kx^k .

Сформулируем общие свойства корней многочлена и сопоставим их со свойствами корней квадратного трехчлена.

1. Корень и делимость

Теорема 1. Если многочлен P делится на двучлен $x - a$, то число $x = a$ является его корнем.

Это простое утверждение не зависит от степени многочлена P . Если $P(x)$ делится на $x - a$, то можно записать тождество $P(x) = (x - a)Q(x)$. Подставляя в него $x = a$, получим, что $P(a) = 0$, т. е. $x = a$ является корнем многочлена $P(x)$.

Теорема 2 (Безу). Если число $x = a$ является корнем многочлена $P(x)$, то $P(x)$ делится на $x - a$.

Эта теорема (обратная к теореме 1) была доказана для квадратного трехчлена. Ее доказательство в общем виде повторяет проведенное ранее рассуждение:

$$\begin{array}{r}P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \\0 = a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \dots + a_1a + a_0 \\ \hline P(x) = x^n - a^n + a_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + \dots + a_1(x - a)\end{array}$$

Так как разность одинаковых степеней x и a делится на $x - a$, то можно вынести общий множитель $x - a$ и получить требуемое равенство $P(x) = (x - a)Q(x)$.

2. Разложение на линейные множители

Зная один корень $x = x_1$ многочлена $P(x)$, мы получим разложение $P(x) = (x - x_1)Q(x)$, где степень многочлена Q на единицу меньше степени многочлена P . Найдя корень $x = x_2$ многочлена $Q(x)$, мы продолжим разложение на множители: $Q(x) = (x - x_2)R(x)$, $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)R(x)$. На каждом шаге степень частного будет уменьшаться на единицу, и за n шагов мы получим разложение многочлена $P(x)$ на n линейных множителей:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

3. Целые корни многочлена с целыми коэффициентами

Теорема 3. Если $x = t$ является целым корнем многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, то свободный член многочлена делится на t .

Эту теорему мы доказали для квадратного трехчлена. Докажем ее в общем виде. Подставим корень $x = t$ в многочлен, получим равенство $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0 = 0$, откуда $a_0 = -t(t^{n-1} + a_{n-1}t^{n-2} + \dots + a_1)$. Все числа в скобке – целые, поэтому a_0 делится на t .

4. Формулы для корней

Дату открытия формулы для корней квадратного уравнения назвать невозможно, но скажем, заведомо это умели делать еще до наступления новой эры, а вот время открытия формулы корней кубического уравнения можно определить достаточно точно – она была опубликована итальянским математиком Д. Кардано в 1545 году.

Переход к степени 4 дался легко – те же итальянцы (среди них можно упомянуть имя ученика Кардано – Феррари) быстро свели решение уравнения четвертой степени к решению кубического уравнения. Затем наступила новая остановка, хотя и не такая длинная, но гораздо более драматичная. После почти трехсот лет поисков формулы корней уравнения пятой степени было доказано, что такой формулы просто не существует. Это замечательное открытие связано с именами трех математиков, каждый из которых прожил короткую, но очень яркую жизнь, – норвежца Абеля (1802–1829), француза Галуа (1811–1832) и итальянца Руффини (1795–1822).

Как понимать эти слова «формулы не существует», почему доказательство отсутствия, несуществования чего-то было действительно замечательным открытием – эти вопросы требуют более подробного разговора, который можно найти в популярных книгах по математике, посвященных ее истории.

Примеры и комментарии



Д. Кардано (1501–1576)

В книге *Ars Magna* (Великое искусство) Д. Кардано излагает следующий метод решения уравнения $x^3 + px + q = 0$. (Общий случай уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ легко к нему сводится заменой

$x = t - \frac{a}{3}$).

Подставим вместо x сумму $u + v$. После преобразований получим

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0.$$

Потребуем, чтобы $3uv + p = 0$.

Получим симметричную систему

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

Возведем второе уравнение в куб и решим стандартную симметричную систему относительно u^3 и v^3 :

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$(uv)^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Решив эту систему, получим знаменитые формулы Кардано:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Решите методом Кардано уравнение $x^3 = 15x + 4$.