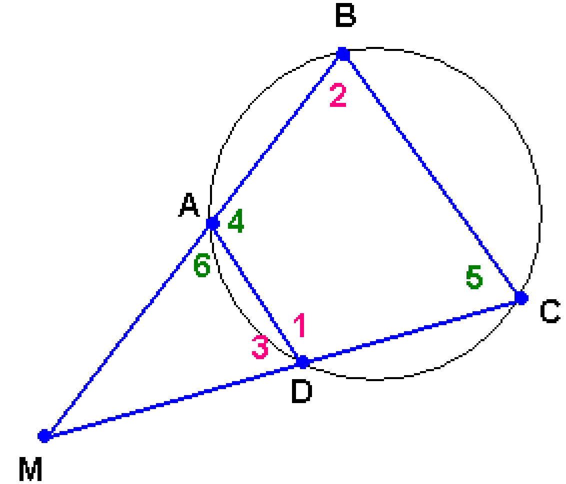
Подготовка к зачету.

Типовая задача № 25.
Задача на доказательство.

№ 1.1 Известно, что около четырёхугольника ABCD можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырёхугольника пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

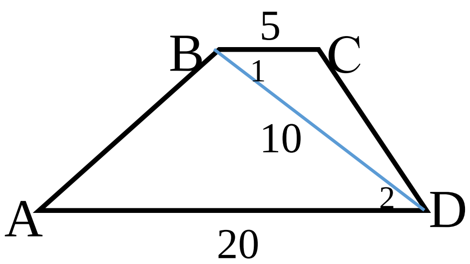
Указания к решению:

$\angle 1+\angle 2=\angle 4+\angle 5=180^o$ (свойство вписанного в окружность четырехугольника); $\angle 1+\angle 3=\angle 4+\angle 6=180^o$ (смежные углы). Следовательно $\angle 2=\angle 3$ и $\angle 5=\angle 6$. Далее делаем вывод о подобии треугольников по двум углам.



№ 2.1 Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 5 и 20, BD=10. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Указания к решению:



$\angle 1=\angle 2$ (накрест лежащие);

отношения сторон образующих углы: $\frac{BC}{BD}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$; $\frac{BD}{AD}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$.

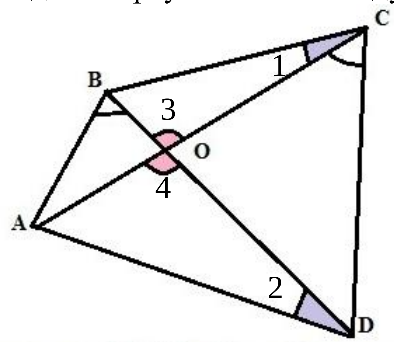
Делаем вывод о подобии треугольников по углу и двум пропорциональным сторонам, образующим эти углы.

№ 2.2 Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 4,5 и 18, BD=9. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

№ 3.1 В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы BCA и BDA равны. Докажите, что углы ABD и ACD также равны.

Указания к решению:

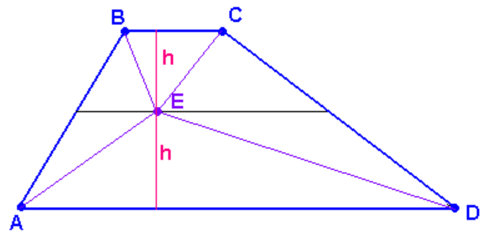
$\angle 1=\angle 2$ (по условию) $\angle 3=\angle 4$ (вертикальны) $\Rightarrow$ $\triangle BOC \sim \triangle AOD$ *(по двум углам).* Рассматриваем $\triangle AOB$ и $\triangle COD$, составляем отношение пропорциональных сторон образующих равные вертикальные углы AOB, COD, делаем вывод о том, что $\triangle AOB \sim \triangle COD$ по второму признаку, из подобия треугольников следует равенство углов.



№ 3.2 В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы ABD и ACD равны. Докажите, что углы DAC и DBC также равны.

№ 4.1 На средней линии трапеции ABCD с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади трапеции.

Указания к решению:



$\boldsymbol{S_{BEC} = \frac{1}{2}BC \cdot h_{BEC}; \ S_{AED} = \frac{1}{2}AD \cdot h_{AED}\ ; h_{BEC} = h_{AED} = \frac{1}{2}h,}$
т.к. точка Е лежит на средней линии

$$\boldsymbol{S_{BEC} + S_{AED} = \frac{1}{4}BC \cdot h \ + \frac{1}{4}AD \cdot h = \frac{1}{4}h(BC + AD) = \frac{1}{2}S_{ABCD}}$$

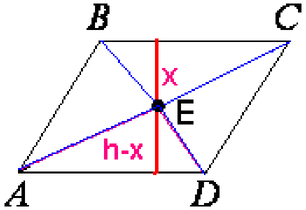
№ 4.2 На средней линии трапеции ABCD с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку K. Докажите, что сумма площадей треугольников BKC и AKD равна половине площади трапеции.

№ 5.1 Внутри параллелограмма ABCD выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади параллелограмма.

Указания к решению:

Решение аналогично предыдущей задаче, основания $BC = AD = a$;

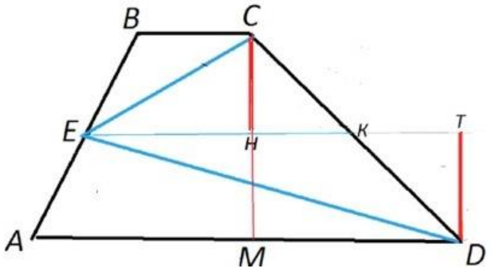
$$\boldsymbol{S_{BEC} + S_{AED}} = \frac{1}{2}a \cdot x + \frac{1}{2}a \cdot (h - x) = \frac{1}{2}a\ (x + h - x) = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$



№ 5.2 Внутри параллелограмма ABCD выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади параллелограмма.

№ 6.1 Точка E — середина боковой стороны AB трапеции ABCD. Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции.

Указания к решению: Доп. построение ЕК – средняя линия трапеции.



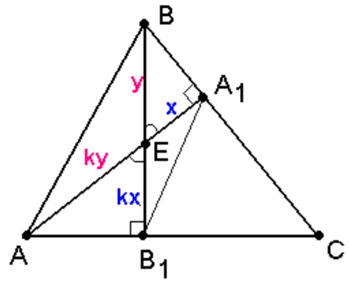
$$S_{ECD} = S_{ECK} + S_{EKD} = \frac{1}{2}CH \cdot EK + \frac{1}{2}DT \cdot EK = \frac{1}{4}h_{ABCD} \cdot EK + \frac{1}{4}h_{ABCD} \cdot EK$$
$$= \frac{1}{2}h_{ABCD} \cdot EK = \frac{1}{2}h_{ABCD} \cdot \frac{BC + AD}{2} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

$CH = DT = \frac{1}{2}h_{ABCD}$, т.к. ЕК – средняя линия.

№ 7.1 В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.

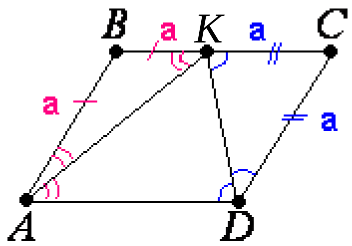
Указания к решению:

Решение аналогично задаче № 3.1. Доказываем подобие треугольников BEA_1 и AEB_1 (по двум углам, коэффициент подобия одно и то же число k); составляем отношения пропорциональных сторон треугольников AEB и A_1EB_1 доказываем их подобие по второму признаку, из подобия треугольников делаем вывод о равенстве углов.



№ 8.1 Биссектрисы углов A и D параллелограмма ABCD пересекаются в точке K, лежащей на стороне BC. Докажите, что K — середина BC.

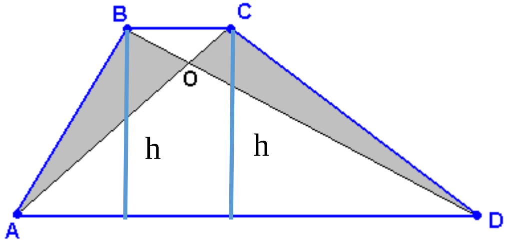
Указания к решению: 1) Доказать, что треугольники АВК и КСD равнобедренные; 2) Следовательно, АВ=ВК и КС= CD, т.к. АВ= CD (свойство параллелограмма), то ВК= КС.



№ 8.2 Биссектрисы углов C и D параллелограмма ABCD пересекаются в точке L, лежащей на стороне AB. Докажите, что L — середина AB.

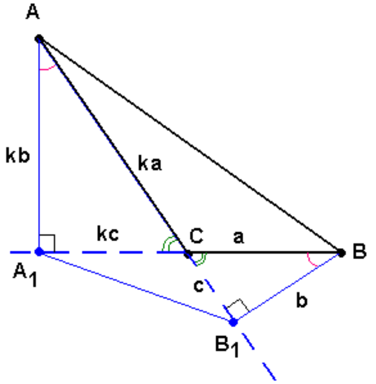
№ 9.1 В трапеции ABCD с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Указания к решению: 1) Площади треугольников ABD и ACD равны. Основание AD и высота h одни и те же (при доказательстве расписать подробно по формулам). 2) Площадь треугольника ABD складывается из площадей треугольника AOB и AOD, а площадь треугольника ACD складывается из площадей треугольника COD и AOD (свойство площадей), поэтому площади треугольников AOB и COD равны.



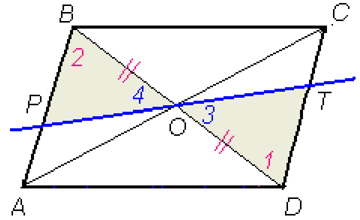
№ 10.1 В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Указания к решению: Решение аналогично задаче № 3.1 и 6.1. Доказываем подобие треугольников AA_1C и BB_1C (по двум углам, коэффициент подобия одно и то же число k); составляем отношения пропорциональных сторон треугольников A_1CB_1 и ACB, доказываем их подобие по второму признаку. **Важно!** В подобных треугольниках напротив равных углов лежат пропорциональные стороны.



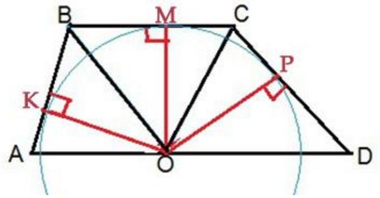
№ 11.1 Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма ABCD проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках P и T соответственно. Докажите, что отрезки BP и DT равны.

Указания к решению: Доказываем равенство треугольников PBO и TOD по стороне и двум прилежащим углам, из равенства треугольников следует, что отрезки BP и DT равны.



№ 12.1 Биссектрисы углов B и C трапеции ABCD пересекаются в точке O, лежащей на стороне AD. Докажите, что точка O равноудалена от прямых AB, BC и CD.

Указания к решению: 1) Расстояние от точки до прямой измеряется длиной перпендикуляра, проведенного к этой прямой. 2) Прямоугольные треугольники BKO и BOM раны по обще гипотенузе и острому углу, BO – биссектриса угла ABC, следовательно OK=OM. 3) По аналогии доказываем равенство треугольников OMC и COP, делаем вывод о равенстве OM=OP или OK=OM=OP. 3) Перпендикуляры, проведенные из точки O к сторонам трапеции равны, следовательно точка O равноудалена от сторон трапеции.



№ 13.1 Сторона BC параллелограмма ABCD вдвое больше стороны AB. Точка E — середина стороны BC. Докажите, что AE — биссектриса угла BAD.

Указания к решению: 1) Доказать, что треугольник ABE – р/б. 2) Из параллельности сторон параллелограмма и того, что треугольник ABE – р/б сделать вывод о равенстве ∠1 = ∠2 = ∠3, следовательно AE - биссектриса угла BAD.